

CHUYÊN ĐỀ
BÀI 4. ĐA THỨC MỘT BIẾN

Mục tiêu

❖ **Kiến thức**

- + Nắm vững khái niệm đa thức một biến.
- + Nắm vững khái niệm về bậc, hệ số của đa thức một biến.

❖ **Kĩ năng**

- + Sắp xếp được đa thức một biến.
- + Tìm được bậc, các hệ số, hệ số cao nhất, hệ số tự do của đa thức một biến.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Đa thức một biến

Đa thức một biến là tổng của các đơn thức một biến. Mỗi số được coi là một đa thức một biến. Bậc của đa thức một biến là số mũ lớn nhất của biến trong đa thức đó.

$A = 3x + 2x^2 + 1$ là đa thức một biến có bậc là 2.

Hệ số

Trong một đa thức một biến đã thu gọn, hệ số của lũy thừa bậc 0 gọi là hệ số tự do, hệ số của lũy thừa bậc cao nhất gọi là hệ số cao nhất.

$$P = 3x^3 + x + 2.$$

2 là hệ số tự do, 3 là hệ số cao nhất.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của đa thức

Phương pháp giải

Ví dụ: Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 - x^3 + 2x^4 - 5x + 2x^3 + 3x - x^4 + 1 \\ &= x^2 + (-x^2 + 2x^3) + (2x^4 - x^4) + (-5x + 3x) + 1 \\ &= x^2 + x^3 + x^4 - 2x + 1 \\ &= x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1. \end{aligned}$$

Bước 1. Nhóm các đơn thức đồng dạng.

Bước 2. Cộng, trừ các đơn thức đồng dạng.

Bước 3. Sắp xếp các hạng tử của đa thức theo lũy thừa tăng hoặc giảm của biến.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của đa thức theo lũy thừa tăng dần của biến:

a) $A(x) = \frac{1}{2}x^5 - x^3 + 5x^4 - \frac{3}{2}x^5 + 2x - x^2 - x^4 + x^3 + 1.$

b) $B(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 2x^2 - 2019 - x.$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A(x) &= \frac{1}{2}x^5 - x^3 + 5x^4 - \frac{3}{2}x^5 + 2x - x^2 - x^4 + x^3 + 1 \\ &= \left(\frac{1}{2}x^5 - \frac{3}{2}x^5 \right) + (-x^3 + x^3) + (5x^4 - x^4) - x^2 + 2x + 1 \\ &= -x^5 + 4x^4 + 2x - x^2 + 1. \end{aligned}$$

Sắp xếp theo lũy thừa tăng dần của biến: $A(x) = 1 + 2x - x^2 + 4x^4 - x^5.$

$$\begin{aligned} \text{b) } B(x) &= x^3 + 3x^2 - 2x + 2x^2 - 2019 - x \\ &= x^3 + (3x^2 + 2x^2) + (-2x - x) - 2019 \\ &= x^3 + 5x^2 - 3x - 2019. \end{aligned}$$

Sắp xếp theo lũy thừa tăng dần của biến: $B(x) = -2019 - 3x + 5x^2 + x^3$.

Ví dụ 2. Cho đa thức $C(x) = x^5 - x^3 + 2x^3 - 4 - 3x^4 + 2x^2 - x^4 + 1$.

- a) Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của $C(x)$ theo lũy thừa giảm dần của biến.
b) Chỉ ra các hệ số khác 0 của $C(x)$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{a) } C(x) &= x^5 - x^3 + 2x^3 - 4 - 3x^4 + 2x^2 - x^4 + 1 \\ &= x^5 + (-x^3 + 2x^3) + (-4 + 1) + (-3x^4 - x^4) + 2x^2 \\ &= x^5 + x^3 - 3 - 4x^4 + 2x^2. \end{aligned}$$

Sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của biến: $C(x) = x^5 - 4x^4 + x^3 + 2x^2 - 3$.

- b) Các hệ số khác 0 của $C(x)$: 1; -4; 1; 2; -3.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến:

- a) $P(x) = x^5 - 3x^3 + 3x - 2x^2 - x^5 + x^4 - 6x + 9 + 4x^3$.
b) $Q(x) = x^7 - x^6 + 2x^3 - x^7 - 2x^4 + x^6 + 2x^5 - 2x + 10 + x^4 - x^6$.

Câu 2: Cho đa thức: $P(x) = 2x^5 - x^2 - 7x - 1 - 3x^5 + 2x^2 + 8x + 15$.

- a) Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của $P(x)$ theo lũy thừa tăng dần của biến.
b) Chỉ ra các hệ số khác 0 của $P(x)$

Câu 3: Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến:

- a) $P(x) = 4x^2 - 5x^3 + 15 - x^3 + x^4 - 2x + 5x - 6x^2 - 1$.
b) $Q(x) = x^6 + 5x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x^4 - 2x^5 + 4x^2 + 1 - x^3$.

Câu 4: Cho đa thức: $P(x) = 5x^4 - x^5 + 3x^3 - 3x - 7x^3 - 5 + 9x^2 - 8x + 1$

- a) Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của đa thức theo lũy thừa tăng dần của biến.
b) Chỉ ra các hệ số khác 0 của $P(x)$

Dạng 2: Xác định bậc, hệ số của đa thức

Phương pháp giải

- Bậc của đa thức một biến (khác đa thức không, đã

thu gọn) là số mũ lớn nhất của biến trong đa thức đó.

- Hệ số của lũy thừa bậc 0 của biến gọi là hệ số tự do; hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của biến gọi là hệ số cao nhất.

Ví dụ. $A(x) = -x^4 + 2x^3 - x^2 + x - 6$

Bậc của đa thức $A(x)$ là 4.

Hệ số tự do là -6

Hệ số cao nhất là -1

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Xác định bậc và hệ số tự do, hệ số cao nhất của mỗi đa thức sau:

a) $A(x) = 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 1.$

b) $B(x) = x^3 - 2x^4 + x - 2x + 8.$

Hướng dẫn giải

a) $A(x) = 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 1.$

- Bậc của đa thức $A(x)$ là 4.

- Hệ số tự do là 1.

- Hệ số cao nhất là 3.

b) $B(x) = x^3 - 2x^4 + x - 2x + 8 = -2x^4 + x^3 - x + 8.$

- Bậc của đa thức $B(x)$ là 4.

- Hệ số tự do là 8.

- Hệ số cao nhất là -2 .

Ví dụ 2.

a) Viết một đa thức một biến có ba hạng tử mà hệ số cao nhất là 5 và hệ số tự do là -1 .

b) Viết một đa thức một biến có hai hạng tử mà hệ số cao nhất là -2 và hệ số tự do là 3.

Hướng dẫn giải

a) $A(x) = 5x^4 - 3x - 1.$

b) $B(y) = -2y + 3.$

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến. Chỉ ra hệ số cao nhất của hệ số tự do của mỗi đa thức đó.

a) $P(x) = x^5 - 3x^2 + x^4 - \frac{1}{2}x - x^5 + 5x^4 + x^2 - 1 + \frac{3}{2}x.$

b) $Q(x) = x^5 - 4x^4 - 3x - \frac{4}{3} - 2x + 3x^4 - x^5 - 2x^4 + \frac{7}{3}.$

Câu 2: Xác định bậc và hệ số tự do, hệ số cao nhất của mỗi đa thức sau:

a) $A(x) = 4x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x + 11.$

b) $B(x) = x^3 + 2x^4 - x + 3x^2 + 2019.$

Câu 3: Viết một đa thức một biến có ba hạng tử mà hệ số cao nhất là 6 và hệ số tự do là -8 .

Câu 4:

a) Viết một đa thức một biến có ba hạng tử mà hệ số cao nhất là 8 và hệ số tự do là 11.

b) Viết một đa thức một biến có hai hạng tử mà hệ số cao nhất là -6 và hệ số tự do là 2017.

Dạng 3. Tính giá trị của đa thức

Phương pháp giải

Ví dụ: Tính giá trị của đa thức: $Q(x) = x^2 - 2x + x - 1$

tại $x = 1$

Bước 1. Thu gọn đa thức (nếu cần).

Ta có: $Q(x) = x^2 - 2x + x - 1$

$$= x^2 - x - 1.$$

Bước 2. Thay giá trị của biến vào đa thức rồi

$$Q(1) = (1)^2 - 1 - 1 = -1$$

thực hiện các phép tính.

$$\text{Vậy } Q(1) = -1.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho đa thức: $P(x) = x^4 - 5x^3 + 2x + 5 - 6x - x^4 + 4x^3 - 1$.

a) Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của $P(x)$ theo lũy thừa giảm dần của biến.

b) Tính $P(0); P(1); P(-3)$.

Hướng dẫn giải

$$a) P(x) = x^4 - 5x^3 + 2x + 5 - 6x - x^4 + 4x^3 - 1$$

$$= (x^4 - x^4) + (-5x^3 + 4x^3) + (2x - 6x) + (5 - 1)$$

$$= -x^3 - 4x + 4$$

Sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của biến: $P(x) = -x^3 - 4x + 4$.

$$b) P(0) = -0^3 - 4 \cdot 0 + 4 = 4.$$

$$P(1) = -(1)^3 - 4 \cdot 1 + 4 = -1 - 4 + 4 = -1.$$

$$P(-3) = -(-3)^3 - 4 \cdot (-3) + 4 = 27 + 12 + 4 = 43.$$

Ví dụ 2. Cho đa thức $P(x) = 2x^4 - x^2 + 3$.

a) Tính $P(0); P\left(\frac{-1}{2}\right); P(1)$.

b) Chứng minh rằng: $P(-a) = P(a)$.

Hướng dẫn giải

a) $P(0) = 2 \cdot 0^4 - 0^2 + 3 = 3.$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 3 = \frac{1-2+24}{8} = \frac{23}{8}.$$

$$P(1) = 2 \cdot (1)^4 - (1)^2 + 3 = 2 - 1 + 3 = 4.$$

b) Ta có:

$$P(a) = 2 \cdot (a)^4 - (a)^2 + 3 = 2a^4 - a^2 + 3 \quad (1).$$

$$P(-a) = 2 \cdot (-a)^4 - (-a)^2 + 3 = 2a^4 - a^2 + 3 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có: $P(a) = P(-a).$

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1. Cho đa thức $Q(x) = x^3 - 2x.$

a) Tính $Q(0); Q(-1); Q(1); Q(2).$

b) Chứng minh rằng $Q(-a) = -Q(a)$ với mọi $a.$

Câu 2. Cho đa thức: $P(x) = 5x^3 + 2x^4 - x^2 + 5x^2 - 6x^4 - 2x^3 + 2017 - x^2.$

a) Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của $P(x)$ theo lũy thừa giảm dần của biến.

b) Chỉ ra bậc của $P(x).$

c) Viết các hệ số khác 0 của $P(x).$ Nêu rõ hệ số cao nhất và hệ số tự do.

d) Tính $P(0); P(1); P(-1).$

Câu 3. Cho đa thức: $P(x) = 8x^3 + 3x^2 - 7x + 6x^4 - 6x^4 + 5x - 5x^3 - 18 - 3x^3 - 3x^2.$

a) Thu gọn $P(x).$

b) Tính giá trị của x để $P(x) = 0; P(x) = 2$

Câu 4. Tính giá trị của đa thức: $P(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots + x^{100}$ tại $x = 1.$

ĐÁP ÁN

Dạng 1. Thu gọn và sắp xếp các hạng tử của đa thức

Câu 1.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(x) &= x^5 - 3x^3 + 3x - 2x^2 - x^5 + x^4 - 6x + 9 + 4x^3 \\ &= (x^5 - x^5) + (-3x^3 + 4x^3) + (3x - 6x) - 2x^2 + x^4 + 9 \\ &= x^3 - 3x - 2x^2 + x^4 + 9. \end{aligned}$$

Sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của biến $P(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 9.$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } Q(x) &= x^7 - x^6 + 2x^3 - x^7 - 2x^4 + x^6 + 2x^5 - 2x + 10 + x^4 - x^6 \\
 &= (x^7 - x^7) + (-x^6 + x^6 - x^6) + 2x^3 + (-2x^4 + x^4) + 2x^5 - 2x + 10 \\
 &= -x^6 + 2x^3 - x^4 + 2x^5 - 2x + 10
 \end{aligned}$$

Sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của biến $Q(x) = -x^6 + 2x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x + 10$.

Câu 2.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } P(x) &= 2x^5 - x^2 - 7x - 1 - 3x^5 + 2x^2 + 8x + 15 \\
 &= (2x^5 - 3x^5) + (-x^2 + 2x^2) + (-7x + 8x) + (-1 + 15) \\
 &= -x^5 + x^2 + x + 14.
 \end{aligned}$$

Sắp xếp theo lũy thừa tăng dần của biến $P(x) = 14 + x + x^2 - x^5$

b) Các hệ số khác 0 của $P(x)$ là $14; 1; 1; -1$.

Câu 3.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } P(x) &= 4x^2 - 5x^3 + 15 - x^3 + x^4 - 2x + 5x - 6x^2 - 1. \\
 &= (4x^2 - 6x^2) + (-5x^3 - x^3) + (-2x + 5x) + (15 - 1) + x^4 \\
 &= -2x^2 - 6x^3 + 3x + 14 + x^4.
 \end{aligned}$$

Sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của biến

$$P(x) = x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 3x + 14.$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } Q(x) &= x^6 + 5x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x^4 - 2x^5 + 4x^2 + 1 - x^3. \\
 &= x^6 + (5x^3 - x^3) \left(-\frac{1}{2}x^2 + 4x^2 \right) + 5x^4 - 2x^5 + 1 \\
 &= x^6 + 4x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 5x^4 - 2x^5 + 1.
 \end{aligned}$$

Sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của biến

$$Q(x) = x^6 - 2x^5 + 5x^4 + 4x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 1.$$

Câu 4.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } P(x) &= 5x^4 - x^5 + 3x^3 - 3x - 7x^3 - 5 + 9x^2 - 8x + 1. \\
 &= 5x^4 - x^5 + (3x^3 - 7x^3) + (-3x - 8x) + (-5 + 1) + 9x^2 \\
 &= 5x^4 - x^5 - 4x^3 - 11x - 4 + 9x^2 \\
 &= -4 - 11x + 9x^2 - 4x^3 + 5x^4 - x^5.
 \end{aligned}$$

b) Các hệ số khác 0 của $P(x)$ là $-4; -11; 9; -4; 5; -1$.

Dạng 2. Xác định bậc, hệ số của đa thức

Câu 1.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(x) &= x^5 - 3x^2 + x^4 - \frac{1}{2}x - x^5 + 5x^4 + x^2 - 1 + \frac{3}{2}x. \\ &= (x^5 - x^5) + (-3x^2 + x^2) + (x^4 + 5x^4) + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x\right) - 1 \\ &= -2x^2 + 6x^4 + x - 1. \end{aligned}$$

Sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của biến $P(x) = 6x^4 - 2x^2 + x - 1$.

- Hệ số cao nhất của đa thức là 6.

- Hệ số tự do là -1 .

$$\begin{aligned} \text{b) } Q(x) &= x^5 - 4x^4 - 3x - \frac{4}{3} - 2x + 3x^4 - x^5 - 2x^4 + \frac{7}{3} \\ &= (x^5 - x^5) + (-4x^4 + 3x^4 - 2x^4) + (-3x - 2x) + \left(-\frac{4}{3} + \frac{7}{3}\right) \\ &= -3x^4 - 5x + 1. \end{aligned}$$

Sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của biến $P(x) = -3x^4 - 5x + 1$.

- Hệ số cao nhất của $P(x)$ là -3 .

- Hệ số tự do của $P(x)$ là 1

Câu 2.

$$\text{a) } A(x) = 4x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x + 11.$$

- Bậc của đa thức là bậc 4.

- Hệ số tự do là 11.

- Hệ số cao nhất là 4.

$$\text{b) } B(x) = x^3 + 2x^4 - x + 3x^2 + 2019.$$

- Bậc của đa thức là bậc 4.

- Hệ số tự do là 2019.

- Hệ số cao nhất là 2.

$$\text{Câu 3. } P(x) = 6x^2 + 7x - 8$$

(Học sinh có thể biết đa thức khác sao cho vẫn đáp ứng được yêu cầu có ba hạng tử và hệ số cao nhất phải bằng 6, hệ số tự do là -8).

Câu 4.

$$\text{a) } A(x) = 8x^5 - 2x^2 + 11.$$

$$\text{b) } B(x) = -6x^2 + 2017.$$

Dạng 3. Tính giá trị của đa thức

Câu 1.

a) $Q(0) = 0^3 - 2 \cdot 0 = 0.$

$$Q(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1) = -1 + 2 = 1.$$

$$Q(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 = -1.$$

$$Q(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 = 8 - 4 = 4.$$

b) Ta có:

$$Q(a) = a^3 - 2 \cdot a = a^3 - 2a.$$

$$Q(-a) = (-a)^3 - 2 \cdot (-a) = -a^3 + 2a = -(a^3 - 2a) = -Q(a).$$

Vậy $Q(-a) = -Q(a)$ với mọi a .

Câu 2.

a)
$$\begin{aligned} P(x) &= 5x^3 + 2x^4 - x^2 + 5x^2 - 6x^4 - 2x^3 + 2017 - x^2 \\ &= (5x^3 - 2x^3) + (2x^4 - 6x^4) + (-x^2 + 5x^2 - x^2) + 2017 \\ &= 3x^3 - 4x^4 + 3x^2 + 2017. \end{aligned}$$

Sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của biến $P(x) = -4x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2017.$

b) Bậc của $P(x)$ là bậc 4.

c) Các hệ số khác 0 của $P(x)$ là $-4; 3; 3; 2017.$

- Hệ số cao nhất là -4

- Hệ số tự do là 2017.

d) $P(0) = -4 \cdot 0^4 + 3 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2 + 2017 = 2017.$

$$P(1) = -4 \cdot 1^4 + 3 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 2017 = -4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2017 = 2019.$$

$$P(-1) = -4 \cdot (-1)^4 + 3 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 2017 = -4 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 2017 = 2013.$$

Câu 3.

a)
$$\begin{aligned} P(x) &= 8x^3 + 3x^2 - 7x + 6x^4 - 6x^4 + 5x - 5x^3 - 18 - 3x^3 - 3x^2. \\ &= (8x^3 - 5x^3 - 3x^3) + (3x^2 - 3x^2) + (-7x + 5x) + (6x^4 - 6x^4) - 18 \\ &= -2x - 18. \end{aligned}$$

b)

$$P(x) = 0$$

$$-2x - 18 = 0$$

$$-2x = 18$$

$$P(x) = 2$$

$$-2x - 18 = 2$$

$$-2x = 20$$

$$x = \frac{18}{-2}$$

$$x = -9$$

Vậy $P(x) = 0$ khi $x = -9$

$$P(x) = 2 \text{ khi } x = -10$$

Câu 4.

Ta có $P(1) = 1 + 1^2 + 1^4 + 1^6 + 1^8 + \dots + 1^{100}$

$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1$ (có 51 số hạng 1)

$= 51.$

$$x = \frac{20}{-2}$$

$$x = -10$$